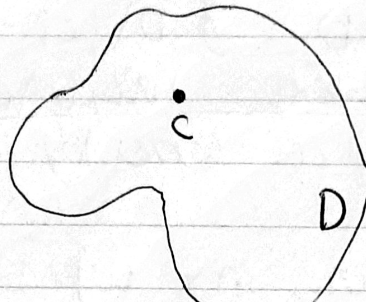
Μαθημα 26ο   31/05/2018

Μεμονωμένες Ανωμαλίες: — επουσιώδεις (= δεν είναι ουσιαστικά ανωμαλία)

— πόλοι:

— ουσιώδεις (= ανωμαλίες που δεν είναι πόλοι ή επουσιώδη)



$f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

[c πόλος της f τάξη

$m := \min\{n \in \mathbb{N} : (z-c)^n f(z)$ φραγμένη σε περιοχή του $c\}$]

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, (χαρακτ. πόλων) $c \in D$, $f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $m \in \mathbb{N}$. Τότε είναι ισοδύναμα: (α) η f έχει στο c πόλο τάξης m

(β) $\exists\ g: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(c) \neq 0$ και

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}, \quad z \in D\setminus\{c\}$$

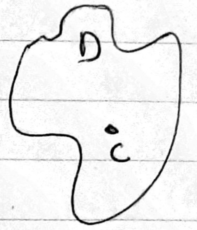
(γ) $\exists$ περιοχή $U \subset D$ του c και $h: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $h(z) \neq 0\ \forall z \in U\setminus\{c\}$ έτσι ώστε

$f = \frac{1}{h}$ στο $U\setminus\{c\}$ και ρίζα τάξης m στο c

δηλ. $h(z) = (z-c)^m \tilde{h}(z)$ με $\tilde{h}(c) \neq 0$

(δ) $\exists$ περ $U \subset D$ του c και $M_*, M^* \in (0, +\infty)$

$$\frac{M_*}{|z-c|^m} \le |f(z)| \le \frac{M^*}{|z-c|^m}, \quad z \in U \setminus \{c\}$$



Απόδειξη: (α) => (β) SOS

Αφού $(z-c)^m f(z)$ είναι φραγμένη σε περιοχή του c τότε από το Θεώρημα Επέκτασης του Rieman $\exists$ $g: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z) = (z-c)^m f(z)$ $\forall z \in D \setminus \{c\}$

Επιπλέον, αν είχαμε $g(c) = 0$, τότε: $g(z) = (z-c)\tilde{g}(z)$

με $\tilde{g}(z): D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.

$g: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη $\Rightarrow$ g αναλυτική $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(c)(z-c)^n}{n!} = g(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n =$$

$$= (z-c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^{n-1} = (z-c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(z-c)^n$$

$\Rightarrow \tilde{g}(z) = (z-c)^{m-1} f(z)$, $z \in D \setminus \{c\}$ $\xRightarrow{\text{Θ.Ε.Riem.}}$ η $(z-c)^{m-1} f(z)$, $z \in D \setminus \{c\}$

επέκτασ. ολομ. στο D $\Leftrightarrow$ είναι φραγμ. σε περιοχή του c $\Leftrightarrow$ είναι πόλος τάξης $m-1$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$, ολομορφ.
Τότε η f έχει πόλο στο c
(χωρίς να προσδιορίζεται εδώ η τάξη)
$\iff \lim_{z \to c} f(z) = \infty$

Απόδειξη: Άσκηση

Θεώρημα Casorati – Weierstrass (χαρακτ. ουσιωδών ανωμαλιών)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη
Τότε είναι ισοδύναμα:

(α) η f έχει στο c ουσιώδη ανωμαλία

(β) $\forall$ περ. $U \subset D$ του c $\overline{f(U \setminus \{c\})} = \mathbb{C}$

(γ) $\exists$ $(z_n) \subset D \setminus \{c\}$ με $z_n \to c$ και

$f(z_n)$ μη συγκλίνουσα στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Απόδειξη

(α) $\Rightarrow$ (β) (με άτοπο).

Έστω ότι υπάρχει U περιοχή του c έτσι ώστε $f(U \setminus \{c\})$ όχι πυκνό στο $\mathbb{C}$.
Τότε $\exists$ κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάποιο $a \in \mathbb{C}$
έτσι ώστε $D(a, \varepsilon) \cap f(U \setminus \{c\}) = \emptyset$

$\Rightarrow |f(z)-a| \geq \varepsilon \quad \forall \quad z \in U \setminus \{c\}$

Συνεπώς αν κοιτάξω τι κάνει η συνάρτηση

$g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$, $z \in U\setminus\{c\}$ είναι ολόμορφη και φραγμένη

Συνεπώς, η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο c, δηλαδή είναι ολόμορφα επεκτάσιμη στο U
δηλαδή η $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, $z \in U\setminus\{c\}$ είναι ολόμορφα επεκτάσιμη στο U , δηλαδή αν $\lim_{z\to c} g(z) \neq 0$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο c και αν $\lim_{z\to c} g(z) = 0$, έχει πόλο στο c (σχ. ΠΟΡΙΣΜΑ)

<u>Ορισμός</u> (Σειρές Laurent)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}_{\text{κανονικό μέρος}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{κύριο ή πρωτεύον μέρος}}$$

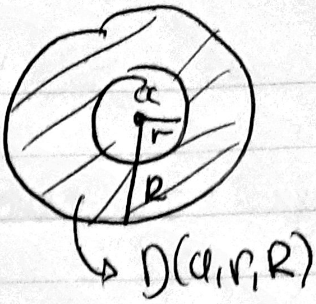
<u>Θεώρημα</u>

Έστω R ακτίνα σύγκλισης της $\sum c_n (z-a)^n$ και $\frac{1}{r}$ ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$

με $r < R$, τότε η $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$

είναι ολόμορφη στον δακτύλιο $D(a,r,R) :=$

$:= \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$



Απόδειξη (sos) (ιδέα)

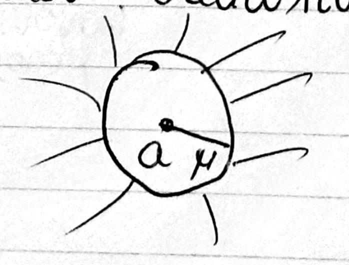
Ουσιαστικά χειριζόμαστε τις σειρές Laurent θέτοντας $w := \frac{1}{z-a}$ και χρησιμοποιούνται τις ιδιότητες των «κανονικών» δυναμοσειρών

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης λ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ για $|z-a| > \mu := \frac{1}{\lambda}$ έχουμε $\frac{1}{|z-a|} < \lambda$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \right| < +\infty$.

Η $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ είναι ολόμορφη ως σύνθεση ολόμορφων στον δακτύλιο $D(a, \mu, +\infty)$



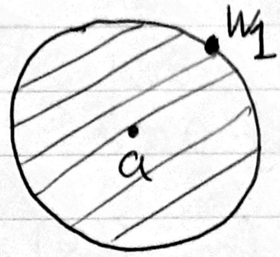
$0 \leq r < R \leq +\infty$

με $g'(z) = \left[\frac{d}{dw} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n \right) \right] \frac{d}{dz} \frac{1}{z-a} = \dots =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \right)$ με $w = \frac{1}{z-a}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνει για $z=z_1$

$\Rightarrow$ συγκλίνει για $|z-a|>|z_1-a|$

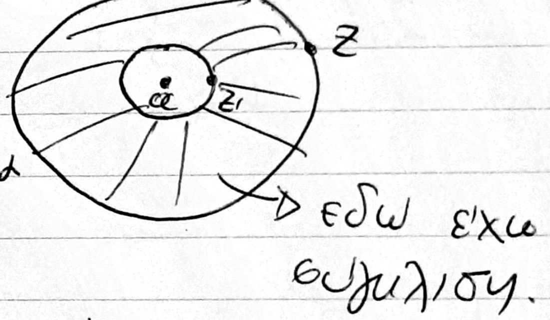


Συνεπώς αν έχω μια σειρά Laurent

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ συγκλίνει για $|z_2-a|>|z-a|>|z_1-a|$

αν $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ συγκλίνει για $z=z_2$

Η f είναι ολόμορφη και η σύγκλιση είναι απόλυτη και ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του δακτυλίου



<u>Θεώρημα</u> Κάθε ολόμορφη συνάρτηση σε έναν δακτύλιο $D(a,r,R)=\{z\in\mathbb{C} : r<|z-a|<R\}$ όπου $0\le r<R\le+\infty$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και αντίστροφα.

Επίσης, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z\in D(a,r,R)$ όπου τα c_n δίνονται ως:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta , \quad n\in\mathbb{Z}$$

$r<\rho<R$ ανεξάρτητα από το ρ

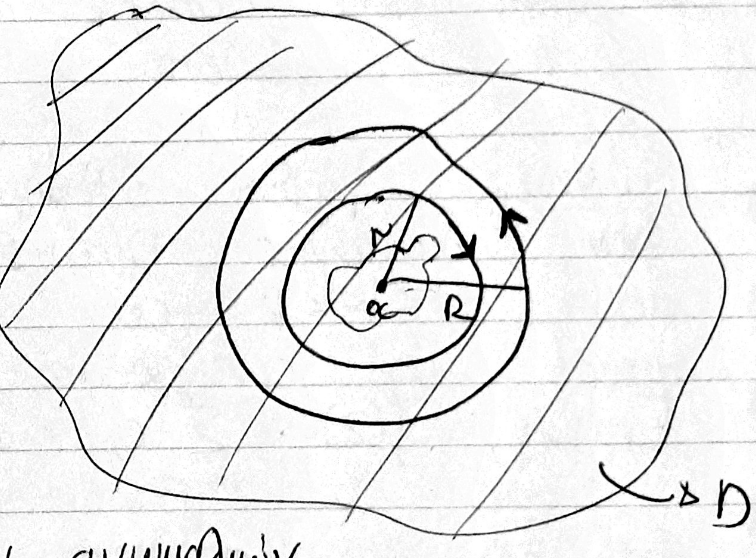
Το ανάπτυγμα αυτό είναι μοναδικό

Τύπος Cauchy σε δακτυλίους

Έστω ένας δακτύλιος $D(a,r,R) \subset D$, D ανοικτό, και $f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $0<r<R<+\infty$

Τότε $\displaystyle\int_{\partial D(a,r)} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial D(a,R)} f(\zeta)\,d\zeta$ και

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

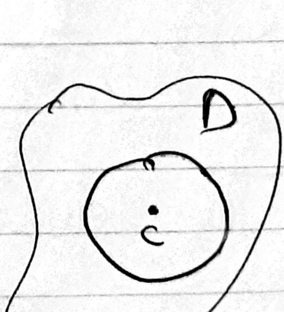


Θεώρημα (Χαρακτηρισμός μεμον. ανωμαλιών με σειρές Laurent)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $c \in D$, $f: D\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

και $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-c)^n$, $z \in D(a,0,R) \subset D$

το ανάπτυγμα Laurent της f



Τότε το c είναι: (α) επουσιώδης ανωμαλία $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $c_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}, n < 0$

(β) πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $c_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}, n < -m$ και $c_{-m} \neq 0$

(γ) ουσιώδης ανωμαλία $\Leftrightarrow$ $c_n \neq 0$ για άπειρα $n < 0$